ACOUSTIQUE MUSICALE : LES GAMMES

Objectifs: - comprendre la construction d'une gamme de notes
- Etudier la gamme naturelle de Pythagore et la gamme tempérée de JS Bach.

I - CONSTRUCTION D'UNE GAMME

1) Définitions

On appelle **intervalle** entre deux notes le rapport de leur fréquence (hauteur). Le rapport 3/2 est jugé agréable à l'oreille: il est dit *consonant*, alors que le rapport 7 est considéré comme *dissonant*.

Une **octave** est un intervalle de valeur égal à **2** : une note est à l'octave d'une autre si sa fréquence est deux fois plus grande. Par exemple, la note La4 à 880 Hz est à l'octave de la note La3 à 440 Hz.

Une **gamme** est l'ensemble des notes comprises dans une octave. Construire une gamme consiste à choisir et ranger une série de notes, comprises à l'intérieur d'une octave ayant entre-elles des propriétés de consonance (des notes "qui s'aiment " comme le disait Mozart enfant).

2) Gammes naturelle et tempérée :

Jusqu'au XVIIe siècle, les gammes utilisées en Occident étaient des "**gammes naturelles**". Elles étaient construites à partir de sons harmoniques émis par une corde tendue. L'une des premières gammes naturelles est la gamme de Pythagore utilisée dans la Grèce Antique. De nombreuses **gammes naturelles** ont été utilisées mais elles présentaient toutes un inconvénient majeur: **l'intervalle entre deux notes d'une octave n'est pas constant**. On ne peut donc pas modifier d'un même intervalle la fréquence de toutes les notes d'une œuvre musicale pour la transposer dans une tonalité différente.
A la fin du XVIIe siècle, une gamme se rapprochant de la gamme naturelle a été construite: **la gamme tempérée**. Les intervalles de cette gamme sont constants et les petits défauts de justesse de cette gamme sont compensés par une grande facilité d'utilisation.

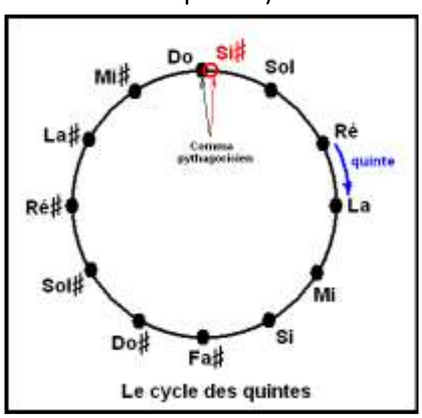
II – La gamme naturelle de Pythagore

Conformément à ses critères d'harmonie, Pythagore utilisait le rapport de fréquence 3/2 (appelé **quinte**) et 2/1 (appelé **octave**) pour construire une gamme de notes consonantes.

La construction d'une telle gamme montre toutefois l'impossibilité de découper plusieurs octaves en quintes : le cycle des quintes ne se referme pas, il subsiste un "comma pythagoricien", différence entre 7 octaves et 12 quintes) :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7$$

en effet : $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}7$ et $2^7 = 128$



NOTE	Fréquence (Hz)
DO	260,74
RE b	274,69
DO #	278,44
RE	293,33
MI b	309,03
RE #	313,24
MI	330,00
FA	347,65
SOL b	366,25
FA #	371,25
SOL	391,11
LA b	412,03
SOL #	417,66
LA	440,00
SI b	463,54
LA #	469,86
SI	495,00
DO	521,48

III – La gamme tempérée

1) Présentation

La gamme musicale qui est celle que nous utilisons de nos jours, a été élaborée à la fin du XVIIe siècle par A. Werckmeister (1645-1706). Quelques années plus tard, elle s'est imposée à l'ensemble de la musique européenne, en particulier sous l'impulsion de J.S. Bach et de J.-P. Rameau.

note	intervalle
do	
	1 ton
ré	
	1 ton
mi	
	½ ton
fa	
	1 ton
sol	
	1 ton
la	
	1 ton
si	
	½ ton
do	

La gamme tempérée est construite en divisant l'octave en **12 intervalles égaux** de valeur t½ appelés **demi-ton**.
Soient f_1, f_2 ..., f_{12} les fréquences successives séparées par un intervalle d'un demi-ton. Nous avons donc: $\frac{f_2}{f_1} = t_{1/2}$ et $\frac{f_{12}}{f_1} = \frac{f_{12}}{f_{11}} \times \frac{f_{11}}{f_{10}} \times \ldots \times \frac{f_2}{f_1} = \left(t_{1/2}\right)^{12} = 2$

Ainsi, la valeur du demi-ton est égale à $2^{1/12}$. Le ton est un intervalle de 2 demi-tons: il vaut $2^{1/12} \times 2^{1/12} = 2^{2/12}$.

En généralisant, deux notes sont séparées de n demi-tons si le rapport de leur fréquence est $2^{n/12}$.

Pour la gamme de Do3 médium, les notes sont séparées à partir de celle du Do3 par des intervalles de ton et demi-ton comme l'indique la figure ci-contre.

note	Fréq. (Hz)	Fréquence en fonction de f_1
DO	261,6	f_1
Ré	293,7	$2^{2/12}.f_1$
Mi	329,6	$2^{4/12}.f_1$
Fa	349,2	$2^{5/12}.f_1$
Sol	392,0	$2^{7/12}.f_1$
La	440,0	$2^{9/12}.f_1$
Si	493,9	$2^{11/12}.f_1$
Do	523,3	$2^{12/12}.f_1 = 2.f_1$

a. Construire la gamme de fréquence en Do3 médium en complétant la troisième colonne du tableau ci-contre.

b. Sachant que la hauteur du La3 est fixée (arbitrairement) à 440,0Hz, calculer les fréquences des notes comprises entre le Do3 et le Do4 dans la gamme tempérée.

c. Comparer les fréquences obtenues avec les fréquences des notes de la gamme naturelle de Pythagore. **Mis à part le La3, les autres notes ont des fréquences légèrement différentes dans les deux gammes.**

d. Quel est l'intervalle de quinte de la gamme naturelle entre le Sol3 et le Do3 ? **Dans la gamme naturelle, l'intervalle de quinte entre le Sol3 et le Do3 est :** $\frac{391,11}{260,74} = \frac{3}{2}$ **.**

e. Même question pour la gamme tempérée. **Dans la gamme tempérée, l'intervalle de quinte entre le Sol3 et le Do3 est :** $\frac{392,0}{261,6} = 1,498 \approx \frac{3}{2}$**.**

f. Pourquoi dit-on que la consonance de quinte dans la gamme tempérée est pratiquement parfaite ? **Dans la gamme tempérée, la quinte n'est pas tout à fait égale à 3/2, néanmoins l'écart est très faible (0,1%), la consonance de quinte de la gamme tempérée est donc *pratiquement* parfaite.** Pourquoi dit-on que les notes Sol3 et Do3 sont séparées d'une quinte ? **Par définition deux notes sont séparées d'une quinte si le rapport de leur fréquence est égal à 3/2 ; c'est le cas ici entre le Sol3 et le Do3.**

2) Les notes altérées

Lorsque les notes sont altérées, par un dièse (#) ou un bémol (b), leur hauteur est augmentée ou diminuée d'un demi-ton.

a. Quelle est la fréquence du Sol3 # dans la gamme tempérée ?

La fréquence du Sol3# dans la gamme tempérée vaut : $2^{1/12}.f_1 = \frac{440,0}{2^{8/12}} = 277,2Hz$ **.**

b. Montrer que la fréquence du Ré# est égale à celle du Mib dans la gamme tempérée.

Dans la gamme tempérée, la fréquence du Mib est la fréquences du Mi diminué d'un demi-ton, soit $\frac{2^{4/12}.f_1}{2^{1/12}} = 2^{3/12}.f_1$**, celle du Ré# est la fréquence du Ré augmentée d'un demi-ton, soit** $2^{1/12} \times 2^{2/12}.f_1 = 2^{3/12}.f_1$ **. Les fréquences du Mib et du Ré# sont donc rigoureusement les mêmes.**

c. On transpose une partition en changeant sa tonalité: cette opération consiste à modifier toutes les notes d'un même intervalle. La tonalité d'une œuvre est augmentée de 2 tons. Par quelle note le Do3 est-il remplacé ?

L'écart entre le Mi3 et leDo3 est de 2 tons, on remplacera donc un Do3 par un Mi3.

Fréquences des notes dans 3 systèmes, LA=440 Hz

Note	Juste intonation	Gamme de Pythagore	**Gamme tempérée**
DO	264,00	260,74	**261,63**
DO?	275,00	278,44	**277,18**
RE	297,00	293,33	**293,66**
MI?	316,80	309,03	**311,13**
MI	330,00	330,00	**329,63**
FA	352,00	347,65	**349,23**
FA?	371,25	371,25	**369,99**
SOL	396,00	391,11	**392,00**
SOL?	412,50	417,66	**415,30**
LA	**440,00**	**440,00**	**440,00**
SI?	475,20	463,54	**466,16**
SI	495,00	495,00	**493,88**
DO	528,00	521,48	**523,25**

Intervalles importants dans 3 systèmes

Intervalle	Juste intonation	Gamme de Pythagore	Gamme tempérée
Quinte DO-SOL	1,500	1,500	1,498
Loup SOL#-MIb	1,536	1,480	1,498
Tierce majeure DO-MI	1,250	1,266	1,260